

PROYECTO DE LA REAL ACADEMIA
DE CIENCIAS

Estímulo del talento matemático



**Prueba de selección
4 de junio de 2005**

Nombre:
Apellidos:
Fecha de nacimiento:
Teléfonos:

Información importante que debes leer antes de comenzar a trabajar

En primer lugar debes ojear todos los ejercicios y después comenzar con los que te parezcan más sencillos.

No es necesario que trabajes las tareas en el orden en que se te presentan. Escoge tú mismo el orden que te parezca mejor.

Queremos conocer no solamente tus soluciones, sino sobre todo tus propios caminos hacia la solución.

Para ello te hemos propuesto los problemas cada uno en una hoja. El espacio libre lo puedes utilizar para tus observaciones y cálculos. Si este espacio no te basta utiliza por favor el reverso de la hoja y si aún te falta espacio utiliza otra hoja en blanco que nos puedes pedir (en la que debes señalar también el número que aparece en la esquina superior derecha de esta primera hoja). De ningún modo debes utilizar una hoja para cálculos y observaciones que se refieran a dos ejercicios distintos.

Al final nos debes entregar todos los papeles que hayas utilizado.

Nos interesa conocer las buenas ideas que se te ocurran en la solución de las tareas propuestas. Estas ideas deberías tratar de describírnoslas de la manera más clara posible. Para ello casi siempre nos bastará que des un par de indicaciones breves. También nos interesan las soluciones parciales a las tareas.

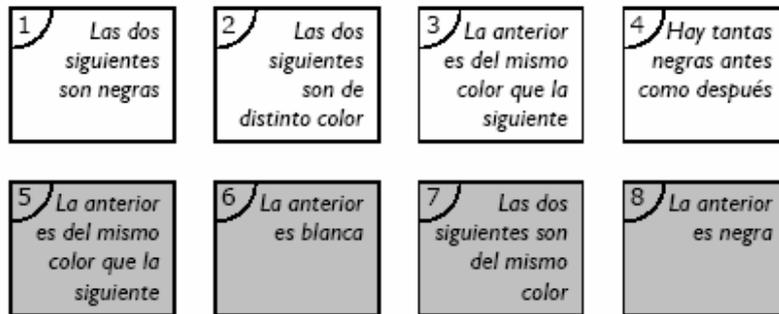
Tienes dos horas y media en total. No deberías emplear demasiado tiempo para un mismo ejercicio. Consejo: el máximo tiempo que debes utilizar para un ejercicio es de 30 minutos.

Te deseamos mucho éxito.



Problema nº 1 (Tarjetas)

Las tarjetas 1, 2, 3 y 4 son blancas; las tarjetas 5, 6, 7 y 8 son negras.



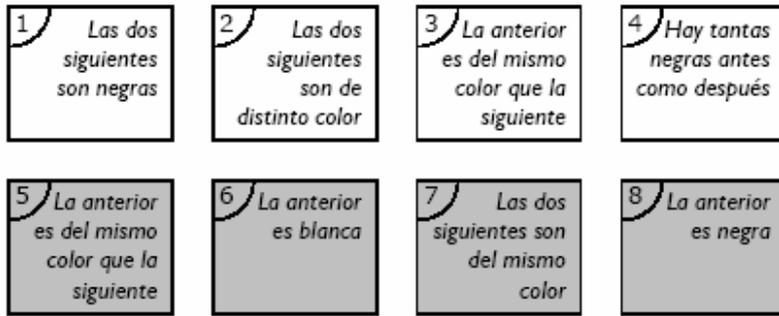
El objetivo final es ordenarlas para que todas las frases resulten verdaderas. Pero antes contesta a las siguientes preguntas.

a) ¿Qué tarjetas se pueden colocar en primer lugar?

b) ¿Qué tarjetas se pueden colocar en último lugar?

c) ¿En qué posiciones puede colocarse la tarjeta 4?

(Sigue a la vuelta)



d) Finalmente, ordena las tarjetas una detrás de otra para que todas las frases resulten verdaderas.



Problema nº 2 (Tablero)

Tenemos un tablero cuadrado y en cada casilla anotamos un número siguiendo estas instrucciones: el número que escribimos es el menor de los números que indican la fila y la columna de la casilla. La figura que tienes a continuación te da un ejemplo en el caso de un tablero 3×3 .

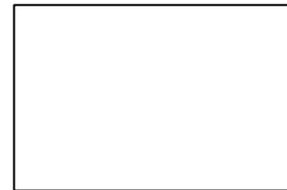
	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	1	2	3

- a) Tenemos un tablero cuadrado de 5×5 (25 casillas). ¿Cuál será la suma de todos los números una vez que hayamos rellenado todo el tablero con la condición que se ha indicado? **Explica** una manera de calcular la suma anterior, sin necesidad de sumar uno a uno todos los números.

(Sigue a la vuelta)

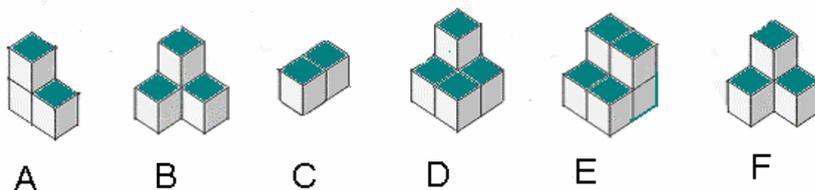
b) Ahora tenemos un tablero de 10 x 10 (100 casillas). Si lo rellenamos siguiendo las instrucciones ya comentadas, ¿cuál será la suma de todos los números anotados? Explica cómo lo has calculado.

c) En el mismo tablero de 10 x 10 estudia cuál sería la suma si, en lugar de poner el menor de los números que indican la fila y la columna de la casilla, pusiésemos el mayor.

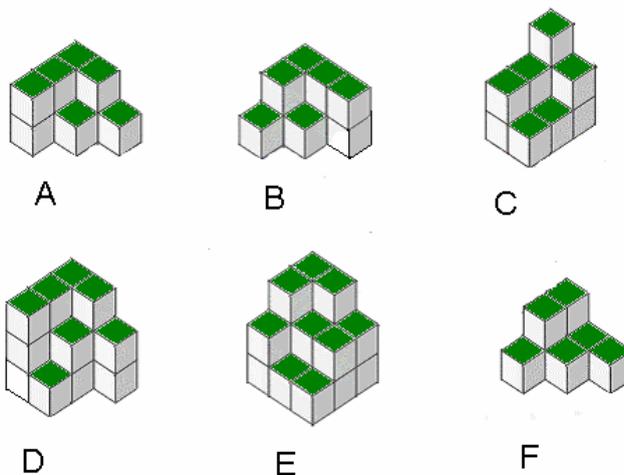


Problema nº 3 (Cubos)

a) Observa las seis piezas siguientes. Elige las parejas de bloques que encajen formando un cubo completo de $2 \times 2 \times 2$.

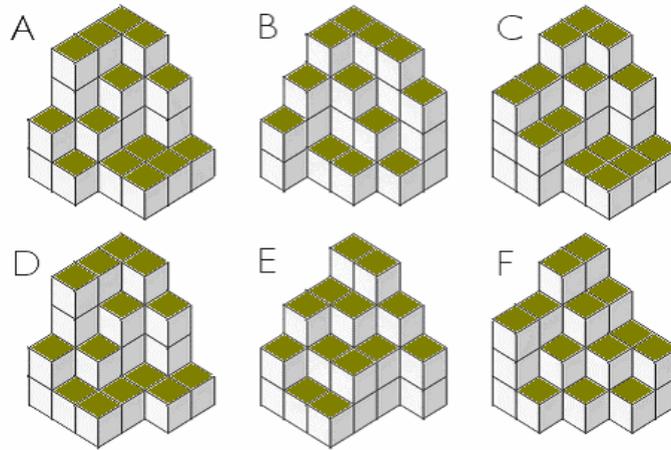


b) Cuenta el número de cubos que hay en cada uno de los siguientes bloques. ¿Cuáles son los dos bloques que hay que unir para formar un cubo completo de $3 \times 3 \times 3$? En cada uno de ellos, numera con 1, 2 y 3 tres cuadrados que queden pegados al encajar los bloques. Explica cómo has encontrado la solución.



(Sigue a la vuelta)

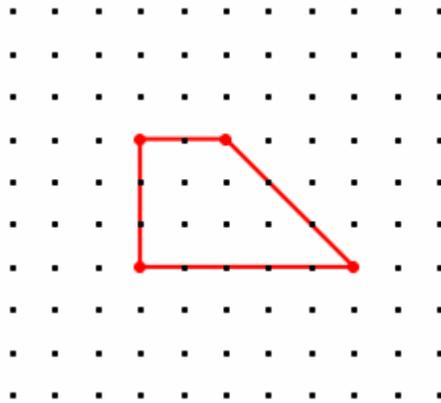
c) Contesta a las mismas preguntas que en el apartado **b)** para los bloques siguientes en el caso de un cubo completo de $4 \times 4 \times 4$. No te olvides de explicar cómo has encontrado la solución.





Problema nº 4 (Números trapeziales)

En este problema consideraremos unos trapezios muy especiales. Tienen que tener dos ángulos rectos y un ángulo de 45° y además sus vértices han de ser puntos de una cuadrícula. Mira el trapecio de la figura: como encierra 18 puntos, contando los que hay sobre los lados, diremos que 18 es un "número trapezial".



(En la carpeta tienes cuadrículas para practicar)

a) Haz un dibujo que muestre que 35 es un número trapezial.

b) Dibuja todos los trapezios que tienen 18 como número trapezial y justifica que no hay más que los que dibujas.

(Sigue a la vuelta)

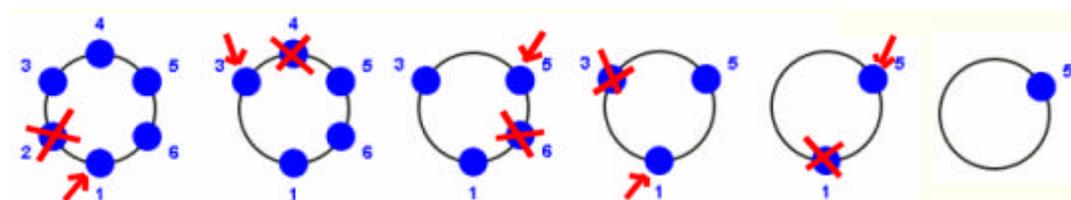
c) Explica por qué cualquier número impar mayor que 3 es un número trapecial.

d) Encuentra razonadamente todos los números entre 4 y 50 que **no** sean números trapeciales.



Problema nº 5 (Fichas saltarinas)

Se colocan 6 fichas en círculo y se numeran del 1 al 6 consecutivamente. Ahora, en el sentido de numeración, voy dejando una ficha y quitando la siguiente. Empiezo dejando la ficha 1 y quitando la 2. El proceso continúa hasta que sólo queda una ficha. En la figura vemos que al final del proceso la ficha final es la número 5.



a) Haz tú lo mismo con 8 fichas en círculo. ¿Qué ficha queda al final?

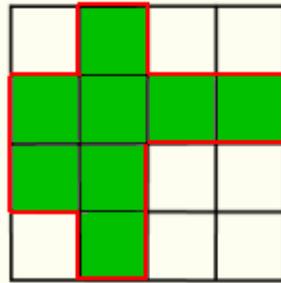
b) Si comenzamos con 16 fichas, ¿qué ficha queda al final?

(Sigue a la vuelta)

c) Los números 8 y 16 son potencias de 2. También el número $1024 = 2^{10}$ es una potencia de 2. ¿Sabrías decirnos, con un razonamiento convincente, qué ficha quedaría al final si comienzas con un círculo de 1024 fichas?

d) Ahora tienes $1026 = 2^{10} + 2$ fichas. ¿Qué ficha quedaría al final? Indícanos las razones de tu contestación.

Problema nº 6 (Perímetro de regiones coloreadas)

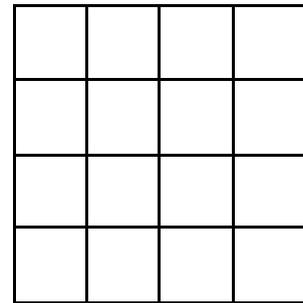
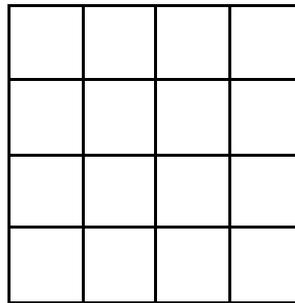
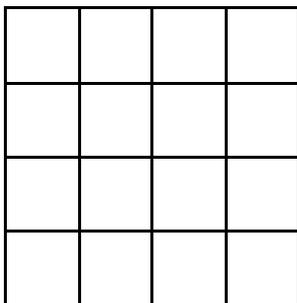


El área de la región coloreada de la cuadrícula es 200 cm^2 .

a) ¿Cuál es el perímetro de la región coloreada?

b) ¿Crees que si cambias de sitio las casillas coloreadas de tal forma que se dibuje otra región con la condición de que cada pieza tenga como mínimo un lado en común con otra pieza (que no queden sueltas) y que toda la región esté dentro de la cuadrícula, podrás encontrar un perímetro diferente? Pon un ejemplo.

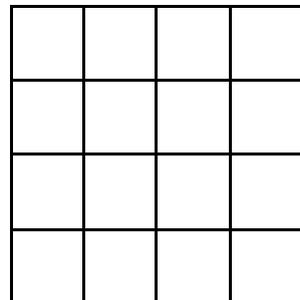
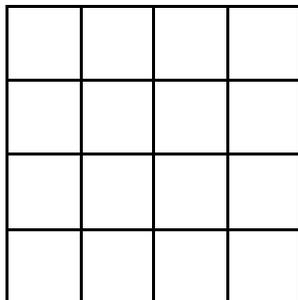
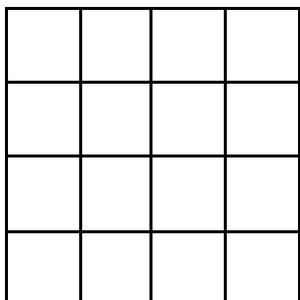
(Cuadrículas para practicar)



(Sigue a la vuelta)

c) Estudia cuál es el mayor perímetro que puedes conseguir en la situación anterior. ¿Cuál será el menor perímetro posible?

(Cuadrículas para practicar)



d) ¿Cuántas casillas de la cuadrícula 4´4 deberías colorear, y en qué posición, para conseguir el perímetro máximo de una región coloreada dentro de la cuadrícula?

(Cuadrículas para practicar)

