

PROYECTO DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
Estímulo del talento matemático

Prueba de selección
5 de junio de 2010



Nombre:.....

Apellidos:.....

Fecha de nacimiento:.....

Teléfonos:.....

Información importante que debes leer antes de comenzar a trabajar

DURACIÓN DE LA PRUEBA: 2 HORAS Y MEDIA

En primer lugar debes mirar todos los ejercicios y después comenzar con los que te parezcan más sencillos.

No es necesario que trabajes las tareas en el orden en que se te presentan. Escoge tú mismo el orden que te parezca mejor.

No queremos conocer solamente tus soluciones, sino, sobre todo, tus propios caminos que te han llevado a ellas.

Para ello te hemos propuesto un problema en cada hoja. Puedes utilizar el espacio libre para tus observaciones y cálculos. Si este espacio no te basta, utiliza por favor el reverso de la hoja y si aún te falta, utiliza otra hoja en blanco que nos puedes pedir (en la que debes señalar también el número que aparece en la esquina superior derecha de esta primera hoja). **De ningún modo debes utilizar una misma hoja para cálculos y observaciones que se refieran a dos ejercicios distintos.**

Al final debes entregarnos todos los papeles que hayas utilizado.

Nos interesa conocer las buenas ideas que se te ocurran en la solución de las tareas propuestas. Deberías tratar de describir estas ideas de la manera más clara posible. Para ello nos bastarán unas breves indicaciones. También nos interesan las soluciones parciales de las tareas propuestas.

Además tenemos una curiosidad, ¿cómo te has enterado de esta convocatoria?

- A través de tu colegio.
- A través de otros medios.

No deberías emplear demasiado tiempo para un mismo ejercicio. Consejo: utiliza un máximo de 30 minutos para cada ejercicio.

Te deseamos mucho éxito



1. HALLANDO LAS COORDENADAS

Fíjate en la siguiente pirámide de números:

	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	5
1					1				
2				2	3	4			
3			5	6	7	8	9		
4		10	11	12	13	14	15	16	
5	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Cada número queda definido por la fila y la columna en la que se encuentra. Por ejemplo, el número 1 está en la fila 1 y en la columna 1, así diremos que sus coordenadas son (1, 1). El número 2 está en la fila 2 y columna -1, por tanto sus coordenadas son (2, -1). Las coordenadas de 4 son (2, 2), las de 18 son (5, -3) etc.

a) ¿Podrías decirnos cuáles son las coordenadas del número 626? ¿Y cuáles las de 895? ¿Y las de 9999? Explica tu razonamiento.

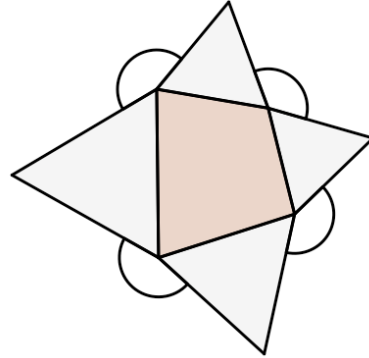
b) Encuentra el número cuyas coordenadas vienen dadas por (40, 30) y el número de coordenadas (50, -10).

2. TRIÁNGULOS



Se tiene un cuadrilátero como en la Figura 1 y sobre cada uno de sus lados y en el exterior de ese cuadrilátero se dibujan triángulos equiláteros.

Figura 1



a) ¿Cuánto vale la suma de todos los ángulos que se forman entre triángulos equiláteros contiguos?

b) Ahora, en vez de un cuadrilátero, tenemos un polígono de ocho lados y también dibujamos triángulos equiláteros sobre sus lados en el exterior de ese polígono. (Figura 2)

¿Cuánto vale la suma de todos los ángulos que se forman entre triángulos equiláteros contiguos?

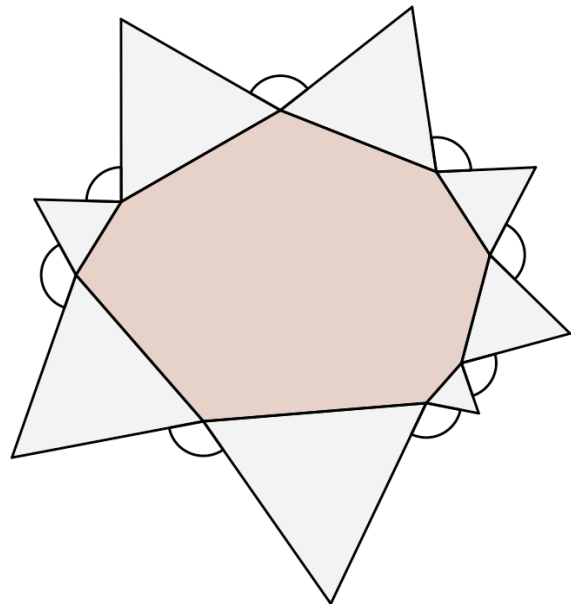


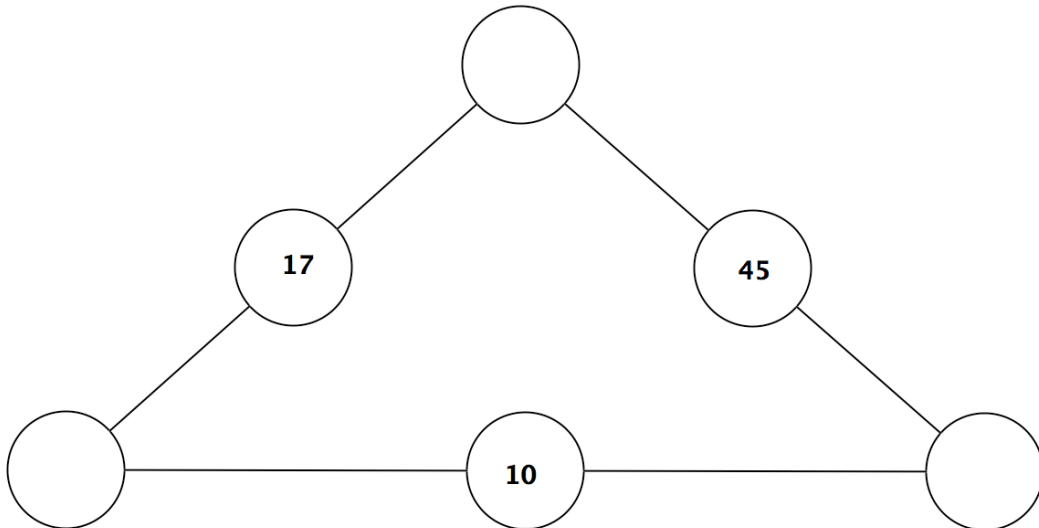
Figura 2

c) Y si el polígono tuviera 1000 lados, ¿cuánto valdría la suma de esos ángulos?

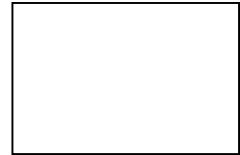


3. NÚMEROS EN UN TRIÁNGULO

Se considera el triángulo numérico de la figura:

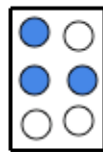


- Rellena con números enteros positivos los círculos en blanco de forma que la suma de los tres números de cada lado del triángulo sea la misma.
- ¿Puedes encontrar otra solución? ¿Cuál?
- Si hubieras encontrado una solución, ¿cómo podrías encontrar otra?
¿Cuántas soluciones diferentes crees que existen?
- Encuentra una solución donde la suma de cada lado sea 80.

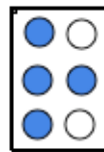


4. BRAILLE

El Braille es un sistema de escritura táctil que utilizan las personas ciegas o las que tienen deficiencias visuales muy graves. En Braille estándar cada símbolo está representado por una combinación de puntos en relieve colocados sobre un rectángulo que tiene 3 filas y 2 columnas. En cada símbolo hay de 1 a 6 puntos señalados.

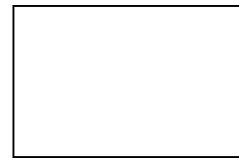


Letra h



Letra r

- ¿Cuántos símbolos de Braille utilizan sólo dos puntos?
- ¿Cuántos hay que utilizan cuatro puntos? Razona por qué hay tantos de dos puntos como de cuatro.
- ¿Cuántos hay que utilizan tres símbolos?
- Hay una versión más simple de Braille, en ella se utilizan puntos en relieve sobre un cuadrado 2x2. ¿Cuántos símbolos se pueden generar en total en esta versión reducida? En cada símbolo al menos hay un punto marcado.
- Para aumentar el número de símbolos se ensayó una versión de Braille en la que los puntos se colocan sobre un rectángulo que tiene cuatro filas y dos columnas; ¿cuántos símbolos distintos tiene esta versión? Como antes, en cada símbolo hay al menos un punto marcado.



5. VIRUS

En un hospital hay un número de pacientes que siempre es una potencia de 2 EXACTA (por ejemplo: 2, 4, 8, 16, 32, etc.). En el hospital ronda un virus que afecta de la siguiente manera:

El DÍA 1, la mitad de los pacientes están sanos y la otra mitad están enfermos.

El DÍA 2, la mitad de los que enfermaron el día 1, sanan.

El DÍA 3, la mitad de los que sanaron el día 2, enferman.

El DÍA 4, la mitad de los que enfermaron el día 3, sanan.

El DÍA 5, la mitad de los que sanaron el día 4, enferman.

Y este proceso continúa así hasta que el virus se estabiliza, que resulta ser cuando el número de pacientes sanos que queda es impar.

a) Completa la siguiente tabla:

(P = Número Total Pacientes; E = Número Pacientes Enfermos; S = Número Pacientes Sanos)

P	DIA 1		DIA 2		DIA 3		DIA 4		DIA 5		DIA 6	
	S	E	S	E	S	E	S	E	S	E	S	E
8	4	4	6	2	5	3	-	-	-	-	-	-
16	8	8	12	4	10	6	11	5	-	-	-	-
32												
64												

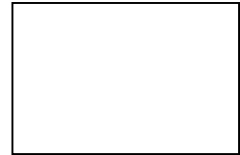
b) ¿En cuántos días se estabiliza el virus si comenzamos con 1024 pacientes?
¿Cuántos pacientes sanos y cuántos enfermos habrá entonces?

c) Si el virus se estabiliza en 7 días, ¿cuántos pacientes comenzaron el experimento? ¿Y si se estabiliza en 12 días?

d) Si el virus se estabiliza con 1365 pacientes sanos, ¿podría haber en ese momento un número par de pacientes enfermos? ¿Cuántos pacientes había al principio?

e) Si cuando el virus se estabiliza, el número de pacientes sanos es superior al doble de enfermos, ¿pueden haber pasado un número impar de días desde que comenzó el proceso?

f) ¿Sabrías decir, sea cuál sea el número inicial de pacientes, cuál es el número de pacientes sanos y enfermos que resultan cuando el virus se estabiliza?



6. POSICIONES

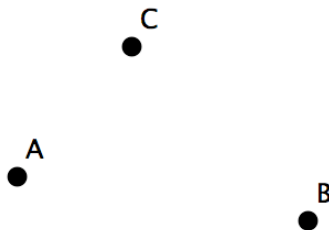
a) Los puntos **A** y **B** son dos vértices de un **triángulo equilátero**. Describe con precisión y dibuja todas las posiciones donde se puede situar el tercer vértice **C**.



b) Los puntos **A** y **B** son dos vértices de un **triángulo isósceles**. Describe con precisión y dibuja todas las posiciones donde se puede situar el tercer vértice **C**.



c) Los puntos **A**, **B** y **C** son tres vértices de un **paralelogramo**. Describe con precisión y dibuja todas las posiciones donde se puede situar el cuarto vértice **D**.



d) Los puntos **A**, **B** y **C** son los tres vértices de un **triángulo equilátero**. Señala las posiciones donde podrías colocar un punto **P** de forma que los triángulos **PAB**, **PBC** y **PCA** sean **isósceles**.

